

۱۷. مقاطع مخروطی

مجتبیٰ رضا نظری
@tmrnazari@mrnrazari

۱۷ - مقاطع مخروطی

۱- به ازای کدام مقدار a دو دایره به معادلات $x^2 + y^2 + \varepsilon x = 0$ و $x^2 + y^2 - 2x + 8y + 9 = 0$ معان خارج یکدیگرند؟ (رایضی ۹۰)

۸ (۱۷) ۶ (۱۲) ۷ (۱۳) ۵ (۱۴)

اند دو دایره معان خارج باشند، لازم است که نامعلومی مرکز این دو دایره با معین شعاعها برابر باشد. در دایره $x^2 + y^2 + \varepsilon x = 0$ مرکز نقطه $O(-\varepsilon/2, 0)$ و شعاع $r = \frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon^2 + 0} = \frac{\varepsilon}{2}$ است. در دایره $x^2 + y^2 - 2x + 8y + 9 = 0$ مرکز نقطه $O(1, -4)$ و شعاع $r = \frac{1}{2}\sqrt{4 + 64 - 36} = \sqrt{17-a}$ است. برای اینکه این دو دایره معان خارج باشند لازم است که:

$$OO = r + r' \Rightarrow \sqrt{(-\varepsilon/2 - 1)^2 + (0 + 4)^2} = \frac{\varepsilon}{2} + \sqrt{17-a} \Rightarrow \varepsilon = 2 + \sqrt{17-a} \Rightarrow a = 8$$

۲- جانب هر دایره به معادلاتی $\frac{1}{2}x^2 + y^2 + ax + by = 1$ در نقطه $(1, -2)$ معان دارند. عرض از مبدأ آن جانب آن را بیابید. (رایضی ۹۰)

۴ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۱ (۴)

سبب جانب های هر دایره به معادلی $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$ می باشد. پس $Bm^2 + A = 0$ هستند. یعنی سبب مورد نظر $m = \frac{1}{2}$ است. از طرف دیگر بدانیم که جانب ها از نقطه $(1, -2)$ می گذرند. پس معادلی جانب مورد نظر برابر است!

برای محاسبه عرض از مبدأ آن داریم:

$$y - 1 = \frac{1}{2}(x + 2)$$

$$x = 0 \rightarrow y - 1 = \frac{1}{2}(0 + 2) \rightarrow y = 2$$

۳- به ازای کدام مقدار a کانون سهم به معادلی $2y^2 + ay - 3x = 0$ بر روی محور y ها قرار می گیرد؟ (رایضی ۹۱)

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

ابتدا معادلی سهم را استخراج می کنیم:

$$2y^2 + ay - 3x = 0 \rightarrow 2(y^2 + \frac{a}{2}y) = 3x \rightarrow (y + \frac{a}{4})^2 - \frac{a^2}{16} = \frac{3}{2}x$$

$$\rightarrow (y + \frac{a}{4})^2 = \frac{3}{2}x + \frac{a^2}{16} = \frac{3}{2}(x + \frac{a^2}{24})$$

معادری افتر مندرجی به یک مستقیم افقی با مشخصات زیر است:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{رأس: } S \\ \alpha = -\frac{a^2}{2\varepsilon} \\ \beta = \frac{-a}{\varepsilon} \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{کانون کهر افقی: } F \\ \alpha + p = \frac{-a^2}{2\varepsilon} + \frac{3}{8} \\ \beta = \frac{-a}{\varepsilon} \end{array} \right.$$

$$\varepsilon p = \frac{3}{8} \rightarrow \text{فاصله: } p = \frac{3}{8}$$

$$x_F = \frac{-a^2}{2\varepsilon} + \frac{3}{8} = 0 \rightarrow \frac{a^2}{2\varepsilon} = \frac{3}{8} \rightarrow a^2 = 9 \rightarrow a = \pm 3$$

۴- معادری (اورد) S رأس یک مستقیم است که محورهای آن موازی محورین حالت و از نقطه (0,0) میگذرد. معادری خط عمود بر آن کدام است؟ (رایضه ۹۲)

۱۱ $y = \frac{1}{\varepsilon}$ ۱۲ $y = \frac{1}{2}$ ۱۳ $y = \frac{3}{\varepsilon}$ ۱۴ $y = \frac{3}{2}$

حسب تاخم است. $y = \frac{3}{\varepsilon} \rightarrow y = 1 - \frac{1}{\varepsilon} \rightarrow y = \frac{3}{\varepsilon}$ ز $a = \frac{1}{\varepsilon} \rightarrow \varepsilon = \varepsilon a \times \varepsilon \rightarrow \varepsilon = \varepsilon a \times \varepsilon \rightarrow \varepsilon = \varepsilon a \times \varepsilon$ (۵۰) $(x-2)^2 = 2a(y-1)$

۵- در معادری به معادری $3x^2 + 4y^2 + 18x - 12y = 0$ مجموع عوامل هر طرف معادله را از دو کانون آن کدام است؟ (رایضه ۹۳)

۱۱ $2\sqrt{2}$ ۱۲ 2 ۱۳ $2\sqrt{3}$ ۱۴ 2

$$3x^2 + 4y^2 + 18x - 12y = 0 \rightarrow 3(x^2 + 2x) + 4(y^2 - 2y) = 0 \rightarrow 3(x+1)^2 + 4(y-1)^2 = 3 + 4 = 7$$

$$\frac{3(x+1)^2}{7} + \frac{4(y-1)^2}{7} = 1 \rightarrow \frac{3(x+1)^2}{12} + \frac{4(y-1)^2}{12} = 1 \rightarrow a^2 = 12 \rightarrow a = 2\sqrt{3}$$

۶- دو خط به معادلات $y = -2x$ و $y = 2x + 2$ ، جانب های یک هذلولی و $M(\frac{3}{2}, 0)$ یکی از نقاط آن است. فاصله دو کانون این هذلولی کدام است؟ (رایضه ۹۳)

۱۱ $2\sqrt{3}$ ۱۲ $2\sqrt{5}$ ۱۳ $2\sqrt{3}$ ۱۴ $2\sqrt{5}$

عمل بیفرو در عبارت مرتبه هذلولی است:

$$\begin{cases} y = -2x \\ y = 2x + 2 \end{cases} \rightarrow -2x = 2x + 2 \rightarrow -4x = 2 \rightarrow x = -\frac{1}{2} \text{ و } y = 1 \rightarrow (\alpha, \beta) = (-\frac{1}{2}, 1)$$

برای این بدانیم هذلوله امعه است یا قائم، کافی است بدانیم که نقطه‌ی M نسبت به دو جانب یکایار مرکز است.

$$x = \frac{3}{2} \rightarrow y = \begin{cases} y = -2x = -2\left(\frac{3}{2}\right) = -3 \\ y = 2x + 5 = 2\left(\frac{3}{2}\right) + 5 = 7; \quad -3 < 0 < 7 \end{cases} \rightarrow \text{هذلوله امعه}$$

$$\rightarrow \frac{(x-\alpha)^2}{a^2} - \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1 \rightarrow \text{معادله‌ی دو جانب: } \frac{x-\alpha}{a} = \pm \frac{y-\beta}{b}$$

$$\rightarrow \text{نسبت دو جانب } \pm \frac{b}{a} \rightarrow \frac{b}{a} = 2 \rightarrow b = 2a \rightarrow \frac{(x+1)^2}{a^2} - \frac{(y-2)^2}{4a^2} = 1$$

$$4(x+1)^2 - (y-2)^2 = 4a^2 \rightarrow \text{نقطه‌ی } M \text{ در معادله‌ی هذلوله صدق میکند}$$

$$4\left(\frac{3}{2}+1\right)^2 - (5-2)^2 = 4a^2 \rightarrow 18-9=9 = 4a^2$$

$$\rightarrow a^2 = \frac{9}{4} \rightarrow a = \frac{3}{2}, b = 3 \quad \text{فاصله دو محور} = 2c = 2\sqrt{a^2+b^2} = 2\sqrt{\frac{9}{4}+9} = 2\sqrt{\frac{45}{4}} = 3\sqrt{5}$$

۷- دو دایره C و C' در نقطه‌ی $(اوه)$ مماس هستند. اگر قائم‌های C و C' دایره C همواره از نقطه‌ی $(3-2)$ بگذرند، مرکز دایره C' با شعاع $5\sqrt{2}$ کدام است؟ (رایضه ۹۴)

- (۱) $(3-1)$ (۲) $(1-1)$ (۳) $(2-1)$ (۴) $(1-1)$

نقطه‌ی $(3-2)$ مرکز دایره‌ی C است. نامردی $(اوه)$ A برابر شعاع C است.

$$OA = R = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{2} \quad \infty = \sqrt{5} + 2\sqrt{5} = 3\sqrt{5}$$

در نتیجه حاصل شعاع C' است که $3\sqrt{5} = \infty$ را برده‌د.

۸- شعاع C با محور $F(2,2)$ و خط‌های $3x-2y=1$ مماس است. اگر C دایره A را در نقطه‌ی A بچسباند. نامردی نقطه‌ی A تا کمترین شعاع C کدام است؟ (رایضه ۹۴)

- (۱) $2\sqrt{5}$ (۲) $2\sqrt{5}$ (۳) $2\sqrt{5}$ (۴) 3

چون خط‌های $3x-2y=1$ است. پس شعاع C است. پس:

$$F(3, 2) = F(\alpha + p, \beta) \rightarrow \alpha + p = 3, \beta = 2$$

$$x = -1 = \alpha - p, \alpha + p = 3 \rightarrow \alpha = 1, p = 2 \rightarrow (y - 2)^2 = 2(2)(x - 1) \xrightarrow{y=0}$$

$$x_A = \frac{3}{2} \rightarrow AF = \sqrt{\frac{9}{2} + 4} = 2,5$$

۹- دو دایره لایزال بر نقطه‌ای (۹-۱) هر دو دایره عمود بر هم هستند. شعاع دایره بزرگتر کدام است؟
 (۱) ۱۴ (۲) ۱۵ (۳) ۱۷ (۴) ۱۹ (۵) ریاضی ۹۵

ماتریس بر محاسبات بر محور x و y مرکز دایره به صورت (۲، -۲) است. (کوین دایره در ناحیه چهارم قرار دارد)

$$(x - r)^2 + (y + r)^2 = r^2$$

نقطه (۹-۲) نیز باید در معادله جایگزین باشد.

$$r^2 - 22r + 185 = 0 \rightarrow r = 5, r = 17$$

۱۰- در هندسه، معادله $x^2 - y^2 + 2y = 12$ فاصله‌ی کمترین از خط $ax^2 - (y - 2)^2 = 1$ عبارت از آن کدام است؟ (ریاضی ۹۵)
 (۱) $\sqrt{3}$ (۲) ۲ (۳) $2\sqrt{2}$ (۴) ۲ (۵) ۲

فاصله‌ی کمترین از خط جانب هندسه بر a با b معادله $x^2 - \frac{(y - 2)^2}{a} = 1$ $\rightarrow a = 1$
 $b = 2\sqrt{2}$

۱۱- نقاط $A(2, 0)$ و $A'(0, 0)$ در AA' و $F(1 + \sqrt{8}, 0)$ از تاویل هندسه است. معادله این هندسه کدام است؟ (ریاضی خارج ۹۰)

$$y^2 = 2(x^2 - 2x) \quad ۱$$

$$y^2 = 2(x^2 - 2x) \quad ۱$$

$$x^2 = 2(y^2 - 2y) \quad ۲$$

$$x^2 = 2(y^2 - 2y) \quad ۲$$

$$\begin{cases} A(2, 0), A'(0, 0) \\ F(1 + \sqrt{8}, 0) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} AA' \parallel Ox \rightarrow \text{هندسه است} \\ \text{وسط } AA' \text{ مرکز } O(1, 0) \\ c = OF = \sqrt{8} \\ b = \sqrt{c^2 + a^2} = 2 \end{cases}$$

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} - \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1 \rightarrow \frac{(x-1)^2}{1} - \frac{(y-0)^2}{2} = 1 \rightarrow y = \pm(x^2 - 2x)$$

۱۲- سه ضلع به کانون (۱، ۲) و وسط هادی به معادلی $x = -3$ محور x ها را با کدام طول قطع می کنند؟ (رایضه خارج ۹۱)

۱۱ $\frac{1}{2}$ ۱۲ $-\frac{1}{2}$ ۱۳ $\frac{1}{2}$ ۱۴ $-\frac{1}{2}$

$$\left. \begin{aligned} x = -3 \text{ از خط } (x, y) \text{ فاصلی} &= x + 3 \\ (x, y) \text{ از نقطه } (1, 2) \text{ فاصلی} &= \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} \end{aligned} \right\} \rightarrow \text{معادلی کهر} : (x+3)^2 = (x-1)^2 + (y-2)^2$$

$$\rightarrow x^2 + 2x + 9 = x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 \rightarrow y^2 - 4y - 8x - 8 = 0$$

که تلفات آن را دور محور x ها و سه ضلع هر دو در $y = 0$ شده باشد و در این صورت با جایگزینی $y = 0$ در معادلی سه ضلع بدست آمده داریم: $x = -\frac{1}{2}$

۱۳- نقطه M (با $\sqrt{8}$) مرکز دایره ای است که بر دو خط به معادلات $x = 2y$ و $y = 2x$ موازی است. شعاع دایره M کوچک تر کدام می باشد؟ (رایضه خارج ۹۲)

۱۱ ۱۲ ۱۳ ۱۴ ۱۵

فاصلی M از این دو خط با هم برابر و مساوی با شعاع دایره است. داریم:

$$R = \frac{|b - 2\sqrt{8}|}{\sqrt{8}} = \frac{|b - 2\sqrt{8}|}{\frac{\sqrt{8}}{2}} \rightarrow |b - 2\sqrt{8}| = |2b - 2\sqrt{8}| \rightarrow b - 2\sqrt{8} = \pm(2b - 2\sqrt{8})$$

$$\begin{cases} b - 2\sqrt{8} = 2b - 2\sqrt{8} \rightarrow b = -2\sqrt{8} \rightarrow R = \frac{|2\sqrt{8} - 2\sqrt{8}|}{\sqrt{8}} = 2 \\ b - 2\sqrt{8} = -2b + 2\sqrt{8} \rightarrow b = 2\sqrt{8} \rightarrow R = \frac{|2\sqrt{8} - 2\sqrt{8}|}{\sqrt{8}} = 2 \end{cases}$$

۱۴- یک سه ضلع به محور x تان آن موازی است که از محور x ها موازی است. محور y ها را در دو نقطه به عرض h از h قطع می کنند و مرکز آن بر روی y نیز نامیده می شود. فاصلی کانون سه ضلع هادی کدام می باشد؟ (رایضه خارج ۹۲)

۱۱ $\frac{1}{3}$ ۱۲ $\frac{3}{2}$ ۱۳ $\frac{2}{3}$ ۱۴ $\frac{3}{2}$

سجده انچه است.

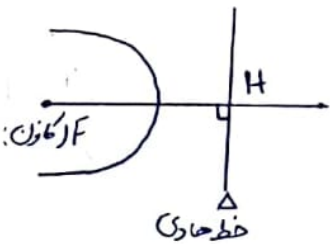
رأس سجده تیر روی نیمه زاویه اول قرار دارد، پس $S = (\alpha, \alpha)$ رأس دایره S در نقطه (α, α) معادله آن کج
عبارت از:

$$(y - \alpha)^2 = \Sigma a(x - \alpha)$$

$$\begin{cases} (1 - \alpha)^2 = \Sigma a(0 - \alpha) \\ (8 - \alpha)^2 = \Sigma a(0 - \alpha) \end{cases}$$

$$\rightarrow (1 - \alpha)^2 = (8 - \alpha)^2 = -\Sigma a\alpha \rightarrow \alpha = 3 \rightarrow a = -\frac{1}{3}$$

نکته: نامبری کانون ناخط هادی در این سجده برابر است با $FH = 2|a|$. در این سجده داریم:



$$FH = 2|a| = \frac{2}{3}$$

۱۵- دوران محورهای مختصات به اندازه θ مناسب نامبر کانون ناخط هادی معطوع معروض به معادله

$$x^2 - 2xy + y^2 - \Sigma x - \Sigma y = 0$$

$$2\sqrt{2}, 1, 2$$

$$2, 2, 2$$

$$\sqrt{2}, 1, 2$$

$$1, 1$$

$$x^2 - 2xy + y^2 - \Sigma x - \Sigma y = 0, \tan 2\theta = \frac{b}{a-c} = \frac{-2}{1-1} \rightarrow 2\theta = \frac{\pi}{2} \rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

$$\begin{cases} x = x' \cos \theta - y' \sin \theta \\ y = x' \sin \theta + y' \cos \theta \end{cases}$$

$$\theta = \frac{\pi}{4}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y') \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y') \end{cases}$$

در معادله معطوع معروض به جای مختصات نقاط مبدأ (x, y) مختصات نقاط جدید (x', y') را جایگزین کنیم:

$$\frac{1}{2}(x' - y')^2 - 2\left(\frac{1}{2}\right)(x'^2 - y'^2) + \frac{1}{2}(x' + y')^2 - 2\sqrt{2}(x' - y') - 2\sqrt{2}(x' + y') = 0$$

=

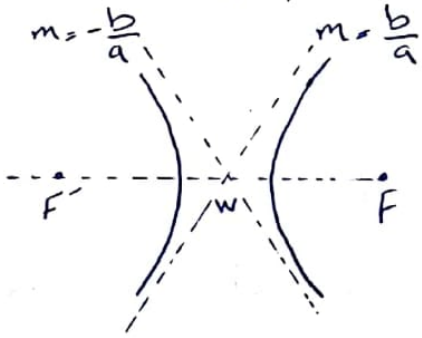
$$\rightarrow y'^2 = 2\sqrt{2}x'$$
 معادله استاندارد شده

$$\Sigma a = 2\sqrt{2} \rightarrow a = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

۱۶- در هذلولی بی‌کانونی $F(1+\sqrt{5}, -2)$ و $F'(1-\sqrt{5}, -2)$ فاصله‌ی دور رأس آن برای a واحد است. معادله‌ی جانب آن با شیب منفی کدام است؟ (ریاضی خارج ۹۳)

۱) $2y + x = 0$ ۲) $y + 2x = 0$ ۳) $y + 2x = 1$ ۴) $2y + x = -3$

حد $y_F = y_{F'} = -2$ است. در هذلولی افقی شیب جانب‌ها برابر $\pm \frac{b}{a}$ است که معادله‌ی آن‌ها از سرزنر هذلولی (نقطه w) می‌گذرد.



$$\begin{cases} F = (1+\sqrt{5}, -2) \\ F' = (1-\sqrt{5}, -2) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} w = \frac{F+F'}{2} = (1, -2) \\ c = \sqrt{FF'} = 2\sqrt{5} \rightarrow c = \sqrt{5} \end{cases}$$

$2a = 2 \rightarrow a = 1$

در هذلولی: $c^2 = a^2 + b^2 \rightarrow b^2 = (\sqrt{5})^2 - 1^2 = 4 \rightarrow b = 2$

شیب جانب مورد نظر دارای شیب $-\frac{b}{a} = -2$ بوده و از نقطه $w = (1, -2)$ می‌گذرد و معادله‌ی آن به صورت زیر است:

$y - (-2) = -2(x - 1) \rightarrow y + 2 = -2x + 2 \rightarrow y + 2x = 0$

۱۷- فاصله‌ی کانونی آن خط هادی یک ربع a واحد است. این سهمی محور x را در دو نقطه به عرض h قطع می‌کند. طول رأس آن با علامت مثبت کدام است؟ (ریاضی خارج ۹۴)

۱) $\frac{5}{2}$ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) $\frac{9}{2}$ ۴) $\frac{5}{2}$

$p = 1$

$F = (\alpha - 1, -2)$

$S = (\alpha, -2)$

معادله‌ی سهمی به صورت $(y+2)^2 = -2(x-\alpha)$ است. هم‌ضرب نقطه (اره) نقطه‌ی S از سهمی است.

$(1+2)^2 = -2(\alpha-1) \rightarrow \alpha = \frac{9}{2}$

۱۸- دایره‌ی لیلیا روبرو که نقاط K و L به معادلات $y = 2x + 10$ و $y = 2x$ در آن است. نقطه‌ی مرکز این دایره کدام است؟ (ریاضی خارج ۹۵)

۱) $(2, -3)$ ۲) $(-3, -1)$ ۳) $(-2, -1)$ ۴) $(-1, -2)$

۱۹- دو خط به معادلات $y = 2x - 1$ و $y = -2x + 7$ بجانب های یک هزلولی هستند. در این هزلولی از نقطه ای (۳ و ۴) بگذرد، نامبری دو کانون آن کلام است؟ (ریاضه خارج ۹۵)

۲، $4\sqrt{5}$

۳، $4\sqrt{3}$

۴، $2\sqrt{5}$

۱، $2\sqrt{3}$

محمد رضا نظری
@tmrnazari @mrnnazari